

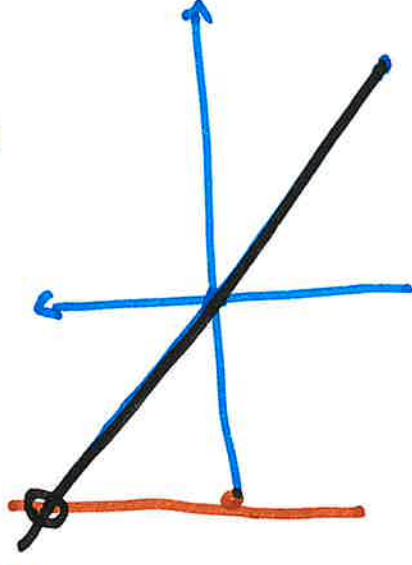
Algebra e Geometria

↓
Studio di strutture e delle loro trasformazioni.

Geometria → geometria affine (e proiettiva)
• geometria Euclidea.

↓
interpretazione ed applicazioni
della parte di algebra lineare.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+h=0 \end{cases}$$



Algebra Lineare

- Spazi vettoriali di dimensione finita
- Sistemi lineari
- Teoria della diagonalizzazione di matrici.

Insieme A è una collezione di oggetti non ordinati e senza ripetizioni.

Esiste per ogni x un predicato $x \in A$ che è vero o falso x appartiene all'insieme

A .

"Insieme $A = \{x \mid x \in x\}$ " ANTONIO DI
RUSSELL.

$A \in A?$ $\swarrow$ sì $\Rightarrow$ per def di A , $A \notin A$ $\searrow$
 $\swarrow$ no $\Rightarrow$ per def di A , $A \in A$ $\searrow$

$$A = \{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{b, a, b, b, c\}.$$

Dato un insieme A è sempre possibile scegliere uno specifico elemento $a \in A$.

dato un insieme possiamo scegliere dei suoi elementi mediante una formula proposizionale

$$A = \{x \in B \mid p(x)\}.$$

$\downarrow$ $x \in B$ $\rightarrow$ tali che.

$p(x)$ formula il cui valore di verità
 • dipende ed è determinato da x .

Coni in connettivi logici. (I ordine).

consideriamo due valori V, F .

$V \& V = V$
 $V \& F = F$
 $F \& V = F$
 $F \& F = F$

↑

e

$V \vee F = V$
 $V \vee V = V$
 $F \vee V = V$
 $F \vee F = F$

↑

oppure.

$\neg V = F$
 $\neg F = V$
 ↑ non

implicazione (implicatione non significa causazione!).

$A \Rightarrow B$ corrisponde a $(\neg A \vee B)$

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\Rightarrow$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

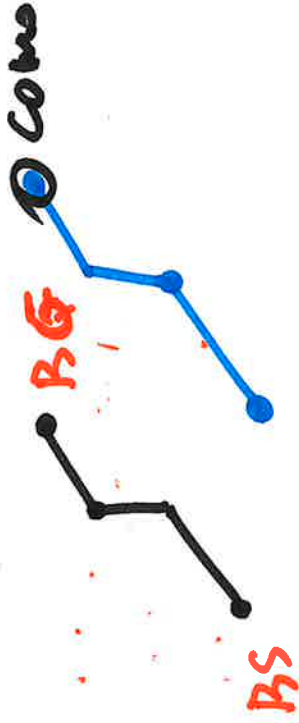
DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

GOAL: $A \Rightarrow B \sim (\neg A \vee B)$

FACCIAMO VEDERE CHE $\neg B \Rightarrow \neg A \sim (\neg \neg B \vee \neg A) =$

$$= (B \vee \neg A) = (\neg A \vee B)$$

DATO L'ITINERARIO π



PARTE DA
BRESCIA $\Rightarrow$ ARRIVO
A BERGAMO

NON ARRIVO
A BERGAMO $\Rightarrow$

NON SONO
PARTITO
DA BRESCIA

N.B in una implicazione

$$A \Rightarrow B$$

| A è detta ipotesi
| B è detta tesi.

$$(A \Leftrightarrow B) \quad := \quad (A \Rightarrow B \ \& \ B \Rightarrow A)$$

↑
equivalente
por def.



coincide con

$$(A \ \& \ B) \vee (\neg A \ \& \ \neg B)$$

A	B	$\Leftrightarrow$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

V	$\Leftrightarrow$	V	V
F	$\Leftrightarrow$	V	V
V		F	F
F		F	F

A e B sono equivalenti:

ogni volta che si verifica A si verifica B
ed ogni volta che si verifica B si verifica A.

$\Leftrightarrow$

"e solo e"

~~"Condizione necessaria e sufficiente"~~

"CNS: condizione nec.
e suff."

A è condizione nec. e suff. per B

se $A \Rightarrow B$.

vicinanza se vale $B \Rightarrow$ è necessario che ci sia A

Sidno ora A un insieme, x un elemento

$$\exists x \in A : p(x)$$

esiste

$$\exists! x \in A : p(x)$$

esiste ed è unico

$$\forall x \in A : p(x)$$

per ogni

$$\exists_{\leq 1} x \in A : p(x)$$

esiste in A al più un
elemento x tale che $p(x)$.

$$\text{"} \quad [\forall x \in A : \neg p(x)] \vee [\exists! x \in A : p(x)]$$

si trova in A almeno
un elemento che soddisfa

$$p(x).$$

si trova in A esattamente un
elemento tale che $p(x)$.

comunque si prende $x \in A$,
vale $p(x)$.

$$(1) \quad \boxed{\neg (\exists x \in A: p(x)) = (\forall x \in A: \neg p(x))}$$

$$\neg (\exists! x \in A: p(x)) = (\neg \exists x \in A: p(x)) \vee (\exists x, y \in A, x \neq y: p(x))$$

$$(2) \quad \boxed{\neg (\forall x \in A: p(x)) = (\exists x \in A: \neg p(x))}$$

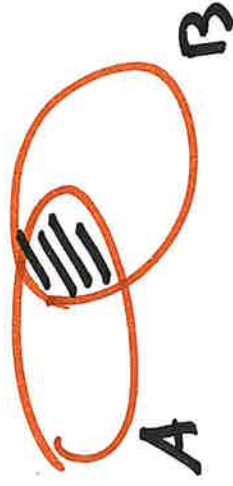
(1) Non esiste x che soddisfa $p(x)$ $\equiv$ tutti gli x non soddisfano $p(x)$.

(2) Non ogni x soddisfa $p(x)$ $\equiv$ esiste almeno un x tale che $\neg p(x)$.

Operazioni fra insiemi.

$A \cap B$ insieme.

$$A \cap B := \{x \in A : x \in B\}$$



$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

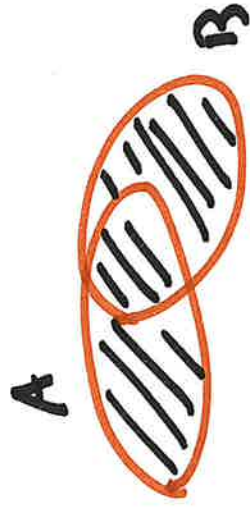
$\therefore$ uguale per
definizione.

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$



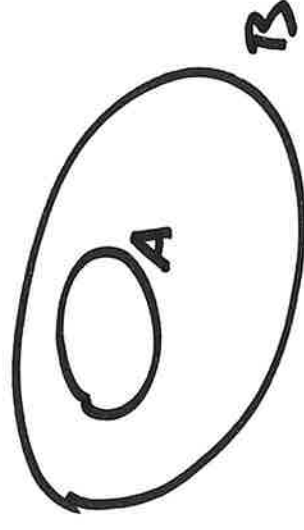
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A: x \in B$$

incluso in B.



$\subseteq$ incluso e possibilmente
uguale

$\subsetneq$ incluso ma $\exists b \in B: b \notin A$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ \& } B \subseteq A$$

$A=B$ significa

$$\forall x \in A, x \in B \text{ \& } \forall x \in B: x \in A$$

cioè

$$\boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in B}$$

$\emptyset$ insieme vuoto. $\forall x: x \notin \emptyset$

$\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A .

N.B.: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.  insieme con un unico elemento che è $\emptyset$.

COPPIA ORDINATA

$$(a, b) \neq (b, a) \neq (a, a) \neq (b, b)$$

$$(a, b) := \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

$$\text{supponendo } a \neq b \Rightarrow (a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

$$(b, a) = \{\{b, a\}, \{b\}\} = \{\{a, b\}, \{b\}\}.$$

$$\text{MA } \{b\} \in (b, a) \text{ e } \{b\} \notin (a, b)$$

$$\Rightarrow (a, b) \neq (b, a).$$

$$(a, a) = \{\{a, a\}, \{a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

Def: prodotto cartesiano di insiemi.

A, B due insiemi

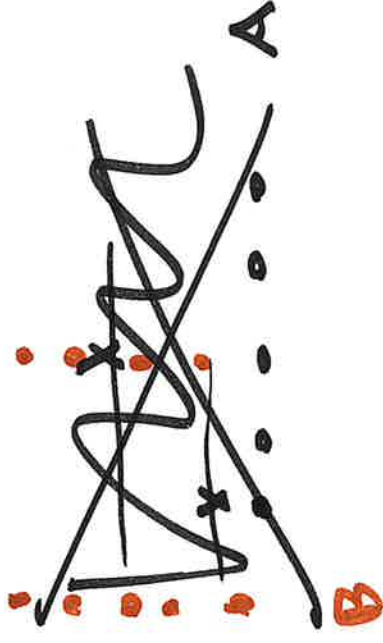
$A \times B$ insieme tale che

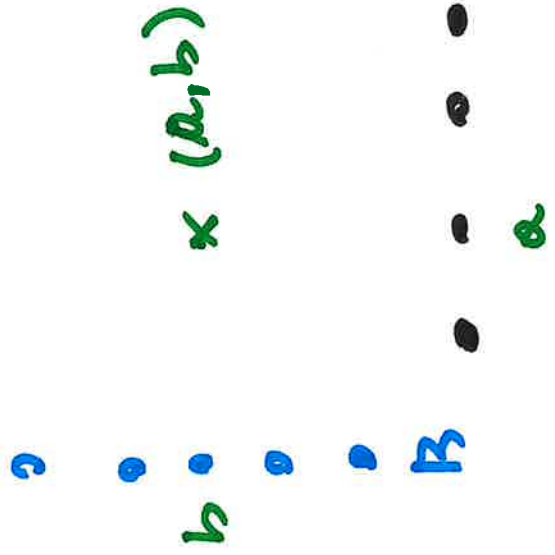
~~$(a, b) \in A \times B \iff a \in A$~~ $(a, b) \in A \times B \iff a \in A \ \& \ b \in B.$

(se $A, B \neq \emptyset$) $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$

serve un sessione che garantisca
che questo è un insieme.

$$\emptyset \times B = A \times \emptyset = \emptyset$$

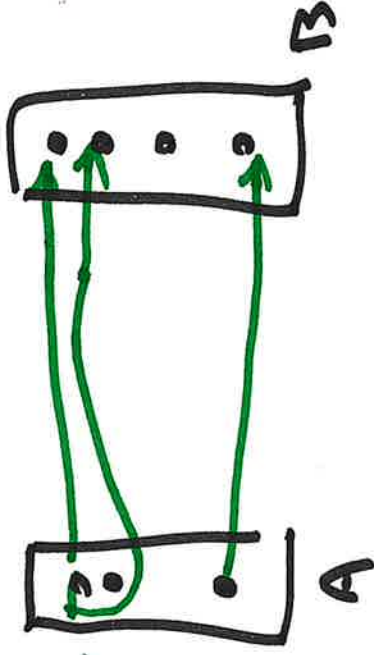




Siano A, B due insiemi non vuoti.

Si dice relazione fra A e B un sottoinsieme

$$R \subseteq A \times B$$



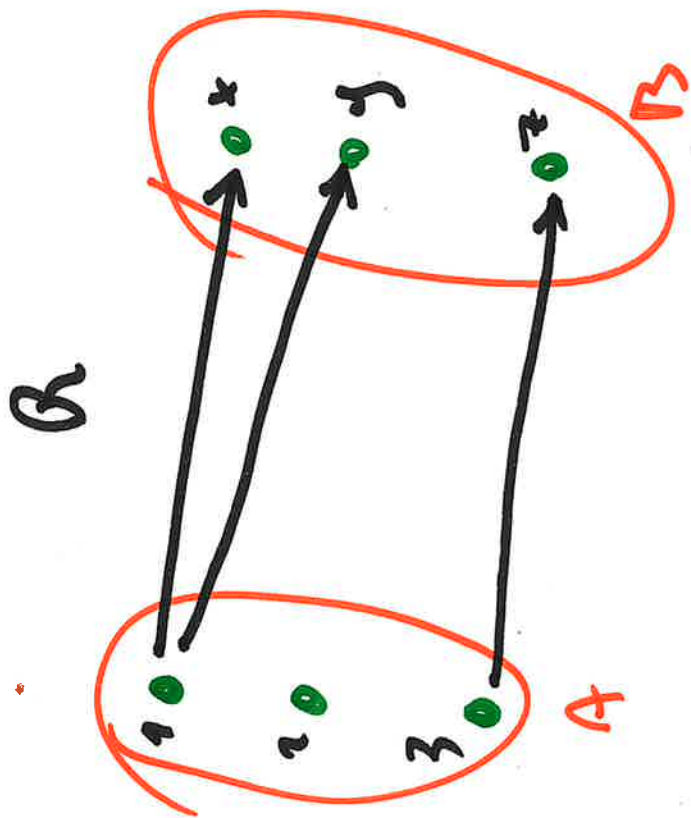
Diciamo che B è associato ad un elemento $a \in A$ dalla relazione R se $(a, b) \in R$.

Es. Sia $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali
(incluso lo 0).
 $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

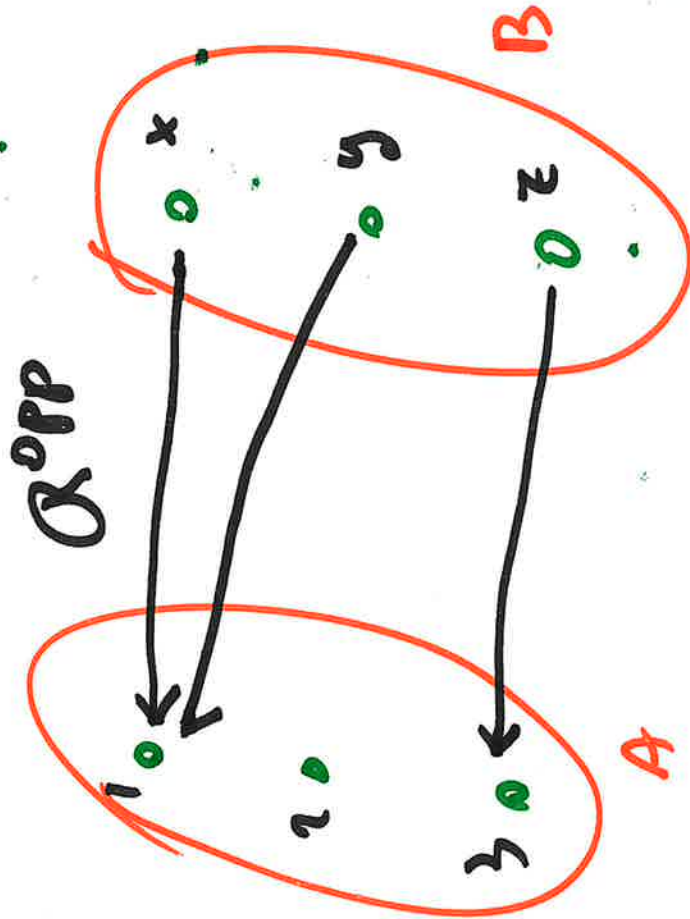
$$R := \{ (a, b) : a \geq b \} = \{ (0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), \dots \}$$

$$\{ (0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), \dots \}$$

Se R relazione $\Rightarrow R^{\text{opp}} \subseteq B \times A$ definita da
 $R^{\text{opp}} = \{ (b, a) \in B \times A : (a, b) \in R \}.$



$(1, x), (1, y), (3, z)$



$(x, 1), (y, 1), (z, 3)$

Una relazione $R \subseteq A \times B$

$$R: A \rightarrow B$$

è detta • ovunque definita se

$$\forall a \in A \exists b \in B: (a, b) \in R.$$

• funzionale se

$$\forall a \in A \exists_{\leq 1} b \in B: (a, b) \in R.$$

• funzione se

$$\forall a \in A \exists ! b \in B: (a, b) \in R.$$

A è detto dominio di R e B codominio

se R funzione

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow R(a) = b$$

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{\{x, y\}, \{z\}, \{1, 5\}\}$$

$$f: A \rightarrow B.$$

$$f(1) = \{x, y\}.$$

$$f(2) = 15$$

$$f(3) = t$$

f funzione $A \rightarrow B$ è detta.

- iniettiva se

$$\forall b \in B \exists \leq 1 a \in A : f(a) = b$$

- suriettiva se

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

- biiettiva se iniettiva + suriettiva

$$\forall b \in B \exists ! a \in A : f(a) = b.$$

f è biiettiva $\Leftrightarrow f^{-1}$ è una funzione

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

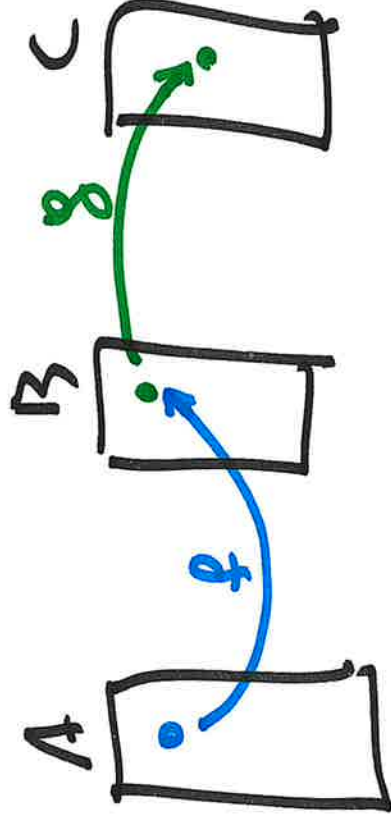
DATE $f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$ codominio di f
e dominio di g
coincidono

$$(g \circ f): A \rightarrow C$$

è l'insieme delle coppie

$$\{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ con } (a, b) \in f \text{ e } (b, c) \in g\}.$$

$$g(f(a))$$



properties associativa

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

$$h: C \rightarrow D$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

#